2022年度
併願優遇入試Ⅰ・一般入試Ⅰ　試験問題

数学(50 分)

（全10ページ）

＜注意＞

1. 試験開始の指示があるまで、この問題冊子・解答用紙を開けてはいけません。

2. 試験開始の指示と同時に、解答用紙に受験番号と氏名を書きなさい。

3. 試験開始後、問題冊子がそろっていなかったり、印刷がはっきりしないところがあったら、手をあげて試験監督に知らせなさい。

4. 解答はすべて解答用紙の指定されたところに書きなさい。ただし、解答欄に（途中の考え・計算）と書かれている問いは、問題を解くにあたって必要な式や図、考え方なども解答用紙に書きなさい。

東京純心女子高等学校

$\boxed{1}$　次の各問いに答えよ。

（１）　$-5-(-6)\div\dfrac{1}{3}+(-2)^3$ を計算せよ。

（２）　$\dfrac{2a-b}{4}-\dfrac{a-3b}{6}$ を計算せよ。

（３）　$(4+3\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$ を計算せよ。

（４）　一次方程式 $5x-7=3(x-9)$ を解け。

（５）　連立方程式 $\begin{cases} 3x-2y=8 \\ 2x+5y=-1 \end{cases}$ を解け。

（６）　二次方程式 $2x^2-7x+4=0$ を解け。

（７）　空欄 $\boxed{}$ にあてはまる数値を答えよ。

階級（m）	度数（人）
10 以上 12 未満	1
12 ～ 14	4
14 ～ 16	7
16 ～ 18	5
18 ～ 20	3
計	20

上の表は，生徒 20 人のハンドボール投げの結果をまとめた度数分布表である。生徒全体の記録の平均値は $\boxed{}$ m である。

（８）　1 から 7 までの整数が 1 つずつかかれた 7 枚のカードがあり，この 7 枚で 1 セットになっている。純子さんと京子さんに 1 セットずつ配り，2 人がそれぞれ カードを 1 枚取りだしたあと，取りだされたカードにかかれた数の差の絶対値 A を調べた。

このとき， A が 奇数である確率を求めよ。

2 3と5の最大公約数，12と35の最大公約数はともに1である。このように，正の整数 a と b の最大公約数が1であるとき， a と b は「互いに素（そ）である」という。また，14と28のように，最大公約数が1でないとき， a と b は「互いに素でない」という。

このとき，次の各問いに答えよ。

純子さんのクラスでは，先生が示した問題をみんなで考えた。

[**先生が示した問題**]

21以下の正の整数のうち， 21と「互いに素である」整数の個数を，次の【手順】にしたがって求めよ。

【手順】

① 21を素因数分解する。

② m を21以下の正の整数とする。 21と m が「互いに素でない」のは，①を利用すると，m が $\boxed{ア}$ または $\boxed{イ}$ の倍数になるときであるとわかる。
ただし， $\boxed{ア} < \boxed{イ}$ とする。

③ 21以下の正の整数のうち， $\boxed{ア}$ の倍数は $\boxed{ウ}$ 個あり， $\boxed{イ}$ の倍数は $\boxed{エ}$ 個ある。
これより，21と「互いに素でない」整数の個数は $\boxed{オ}$ 個である。

④ ③を利用すると，21以下の正の整数のうち， 21と「互いに素である」整数の個数は， $\boxed{カ}$ 個であるとわかる。

（1） [**先生が示した問題**] の空欄 $\boxed{ア}$ から $\boxed{カ}$ にあてはまる数値を，【手順】にしたがって答えよ。

純子さんのグループは，[**先生の示した問題**] に答えることができた。

次に，ある正の整数が，2 つの素数 p と q の積 pq である場合を考えた。そして，新しい問題を作成した。

[**純子さんのグループが作った問題**]

p と q を異なる素数とし，積 pq を作る。 pq 以下の正の整数のうち， pq と「互いに素である」整数の個数を，次の【手順】にしたがって求めよ。ただし， $p < q$ とする。

【手順】

① 正の整数 pq を素因数分解すると $p \times q$ になる。

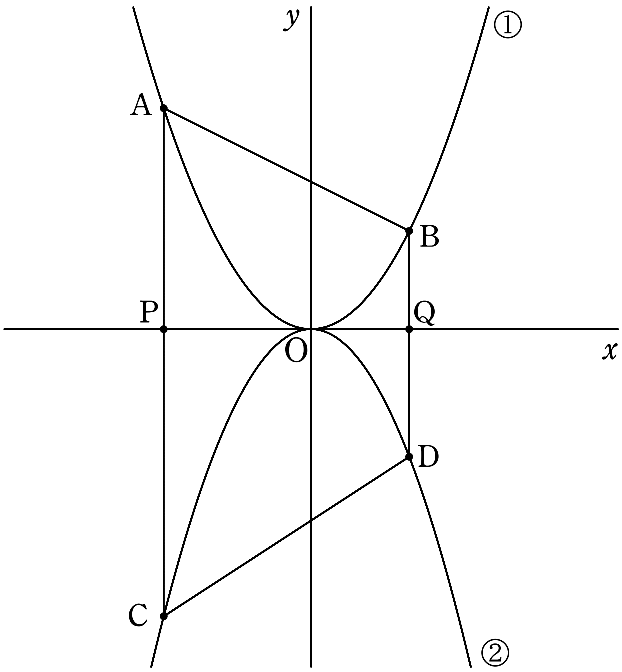
② m を pq 以下の正の整数とする。 pq と m が「互いに素でない」条件を p と q を用いて書く。

③ ②の条件を利用して， pq 以下の正の整数のうち， pq と「互いに素でない」整数の個数を p と q を用いた式で書く。

④ pq 以下の正の整数のうち， pq と「互いに素である」整数の個数を p と q を用いた式で書く。

（2） [**純子さんのグループが作った問題**] について，手順②，③，④の解答をそれぞれ記述せよ。

$\boxed{3}$　a と b は正の定数とする。下の図で，放物線 $y=ax^2$ …① と放物線 $y=-bx^2$ …②，6 点 A，B，C，D，P，Q は，次の条件を満たしている。



点 A は放物線 ① 上の点で，座標は $\left(-3, \dfrac{9}{2}\right)$ である。

点 B は放物線 ① 上の点で，x 座標は 2 である。

点 A を通り y 軸に平行な直線をひく。その直線と x 軸との交点，放物線 ②との交点が，それぞれ点 P，点 C である。

点 B を通り y 軸に平行な直線をひく。その直線と x 軸との交点，放物線 ②との交点が，それぞれ点 Q，点 D である。

このとき，次の各問いに答えよ。ただし，軸の 1 目盛りの長さは 1 cm として計算せよ。

（1）　a の値を求めよ。

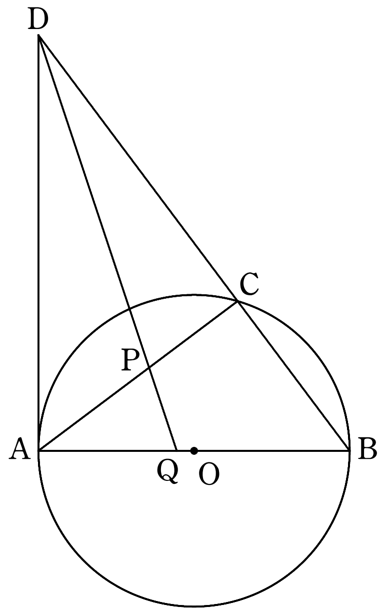
（2）　直線 AB の方程式を求めよ。

（３）　△OABの面積を求めよ。

（４）　台形PCDQの面積をbを用いて表せ。

（５）　△OABと△OCDの面積の比が2：3とする。このとき，bの値を求めよ。

4　下の図は，直径 15 cm の円 O とその直径 AB に対して，次のような作図をおこなった図である。



点 C は円周上の点で$AC = 12$ cm である。点 A における円 O の接線と直線 BC との交点を点 D とする。次に，∠ADB の二等分線をひき，線分AC，直径 AB との交点をそれぞれ点 P，点 Qとする。

このとき，次の各問いに答えよ。

（１）　線分 AD と線分 CD の長さをそれぞれ求めよ。

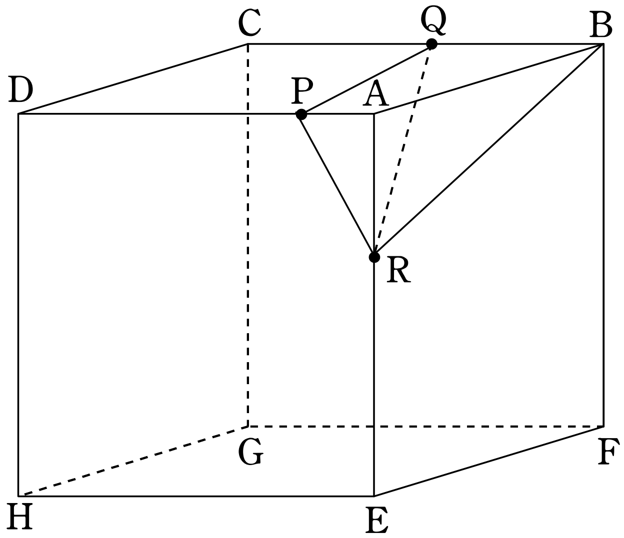
（２）　線分 CP の長さを求めよ。

（３）　線分AQ の長さを求めよ。

（４）　△APQ の面積を求めよ。

5　$AB = 4\,cm$，$AD = 6\,cm$，$AE = 6\,cm$ である直方体 ABCD－EFGH がある。
3点 P，Q，R は，この直方体の辺上を次の規則にしたがって動く点である。

① 点 P は辺 AD 上を，毎秒 1 cm の速さで頂点 A から頂点 D まで動く。
② 点 Q は辺 BC 上を，毎秒 2 cm の速さで頂点 B から頂点 C まで動く。
点 Q は頂点 C に達したら向きを変え，同じ速さで頂点 C から頂点 B まで動く。
③ 点 R は辺 AE 上を，毎秒 2 cm の速さで頂点 A から頂点 E まで動く。
点 R は頂点 E に達したら向きを変え，同じ速さで頂点 E から頂点 A まで動く。
④ 3点 P，Q，R は同時に動きはじめ，点 P が頂点 D に達したら，動きを停止する。



このとき，次の各問いに答えよ。

（1）　3点が同時に動きはじめてから 2 秒後の四角錐 R－ABQP の体積を求めよ。

（2）　$0 < t \leqq 3$ とする。3 点が同時に動きはじめてから t 秒後の四角錐 R－ABQP の体積を，t を用いて表せ。

（3）　四角錐 R－ABQP の体積と直方体 ABCD－EFGH の体積の比が 4：27 になるのは，3 点が同時に動きはじめてから何秒後かをすべて求めよ。ただし，次の 2 つの場合に分けて答えよ。

①　$0 < t \leqq 3$

②　$3 < t < 6$