

数 学

2021 年度 東京純心女子高等学校入学試験問題

(一般入学試験 I 特進プログラム&特待生選抜を兼ねる)

《注意事項》

1. 大問は、 から まであります。
2. 解答は解答用紙に記入してください。
3. 問題の余白は、計算等に自由に使用してください。

1 次の各問いに答えよ。

(1) $-4^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - (-3)^2$ を計算せよ。

(2) $\frac{5x-3y}{7} - \frac{2x-y}{5}$ を計算せよ。

(3) $(2\sqrt{6} + \sqrt{3})(3\sqrt{6} - 2\sqrt{3})$ を計算せよ。

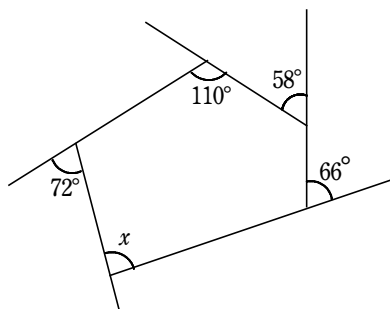
(4) 二次方程式 $3(x+2)^2 + 12 = 2x(x+1)$ を解け。

- (5) 連立方程式 $\begin{cases} ax+2by=-13 \\ 2ax-3by=16 \end{cases}$ の解が $x=-1$, $y=2$ であるとき, a , b の値を求めよ。

- (6) $\sqrt{\frac{1080}{n}}$ が自然数となるような自然数 n のうち, 最も小さいものを求めよ。

- (7) $x=\sqrt{5}-2$, $y=\sqrt{5}+2$ のとき, x^3y-xy^3 の値を求めよ。

- (8) 下の図で, $\angle x$ の大きさを求めよ。



2 次の会話文の ① ～ ⑬ にあてはまる数または式を答えよ。

先生：これから大小2つのさいころをふり、出た目の数をそれぞれ a, b とするよ。
その a, b を用いて何題か問題を解いてみましょう。まず、 x の方程式 $ax = b$ をつくります。この一次方程式の解が整数になる確率を求めてみましょう。

純子：目の数は1から6の自然数であるから、目の出方は、 $6 \times 6 = 36$ で36通りあります。このとき一次方程式 $ax = b$ の解は $x = \frac{b}{a}$ になります。この解 x が整数になるときの a, b の組み合わせは ① 通りあるから、求める確率は ② です。

先生：よくできましたね。次は二次方程式 $x^2 - 2ax + a^2 = b$ をつくるよ。この二次方程式の解が整数になる確率は求められるかな。

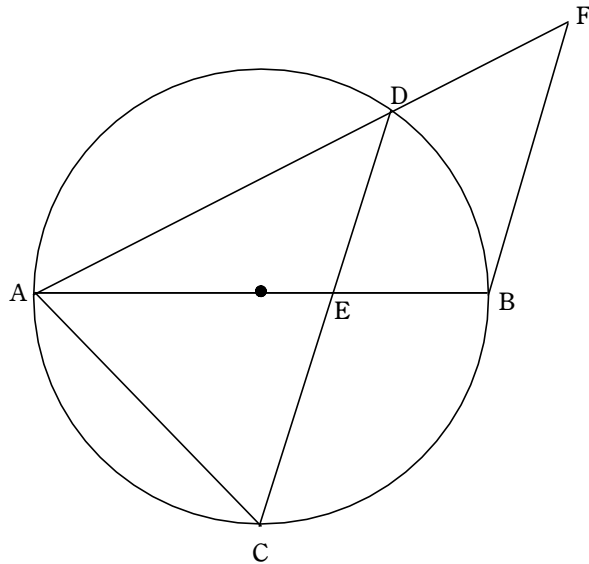
純子： $x^2 - 2ax + a^2$ を因数分解すると ③ になるから、③ = b の解を考えればよいわ。これを解くと、 $x =$ ④ $\pm \sqrt{$ ⑤ $}$ になる。解 x が整数になるのは、 $\sqrt{$ ⑤ $}$ が整数になるときで、考えられる ⑤ の値は ⑥ 通りあるから、求める確率は ⑦ です。

先生：よくできました。次に二次方程式 $x^2 - 2ax + a^2 = b$ の解が一番大きくなる場合と一番小さくなる場合を調べてみましょう。

純子：解が一番大きくなるのは、④ + $\sqrt{$ ⑤ $}$ の値が一番大きくなる時だから、 $a =$ ⑧、 $b =$ ⑨ のときで、解は $x =$ ⑩ です。同じように考えると、解が一番小さくなるのは、④ - $\sqrt{$ ⑤ $}$ の値が一番小さくなる時だから、 $a =$ ⑪、 $b =$ ⑫ のときで、解は $x =$ ⑬ です。

先生：正解です。

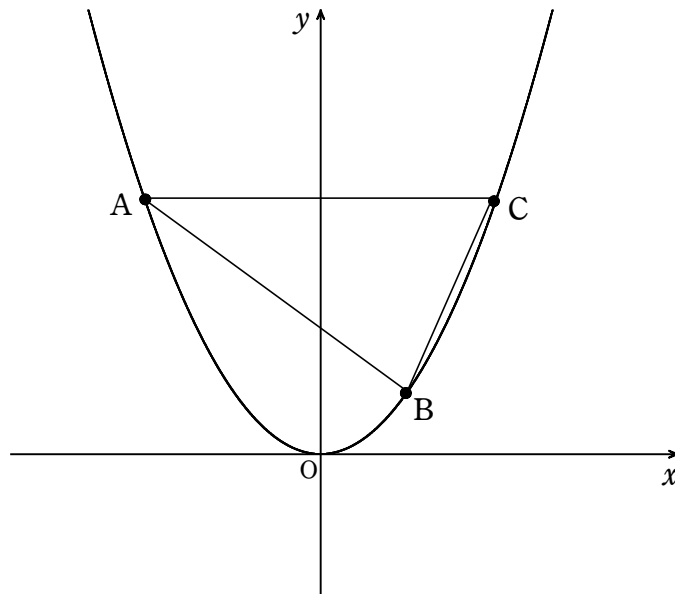
- 3 図のように、直径を AB とする半径 $2\sqrt{5}$ cm の円がある。この円周上に異なる 2 点 C , D をとり、線分 AB と線分 CD の交点を E とする。また、点 B から直線 CD に平行な直線をひき、直線 AD との交点を F とする。 $AD = 8$ cm, $DF = 4$ cm, $BF = 4\sqrt{2}$ cm, $\widehat{AC} = \widehat{BC}$ であるとき、次の各問いに答えよ。



- (1) $\angle AFB$ の大きさを求めよ。
- (2) 線分 AE の長さを求めよ。
- (3) 四角形 $DEBF$ の面積を求めよ。
- (4) $\triangle ACE$ の面積を求めよ。

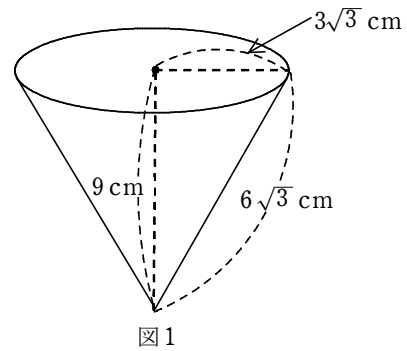
4 図のように、関数 $y=ax^2$ のグラフ上に、3点 A, B, C がある。

A の座標は $(-4, 8)$ 、B の x 座標は 2 で、直線 AC は x 軸に平行である。このとき、次の各問いに答えよ。

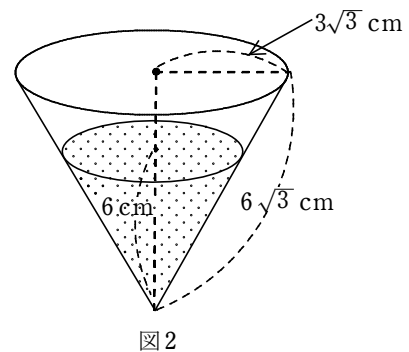


- (1) a の値を求めよ。
- (2) 2点 A, B を通る直線の方程式を求めよ。
- (3) 線分 AC の中点を通り、直線 AB に平行な直線の方程式を求めよ。
- (4) 点 P が、 $y=ax^2$ のグラフ上を点 B から C まで移動する。このとき、 $\triangle ABP$ の面積が、 $\triangle ABC$ の面積の $\frac{1}{2}$ となるような点 P の x 座標を求めよ。

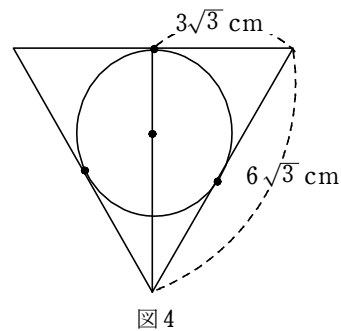
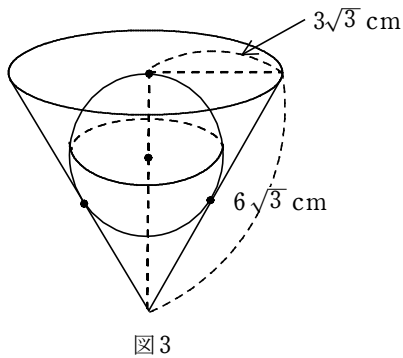
- 5 図1のように、底面の半径 $3\sqrt{3}$ cm、深さ9 cm、母線の長さ $6\sqrt{3}$ cmの円錐の容器がある。このとき、次の各問いに答えよ。



- (1) 図2のように、この容器に深さ6 cmまで水を入れた。あと何 cm^3 水を入れると満水になるか。



- (2) この容器に水を満水にした後、図3のように容器の中に球を入れたところ、水があふれ出た。このとき、球は円錐の底面の円の中心と母線に接し、円錐の頂点と球の中心を通る平面で立体を切ると、切り口は図4のようになった。



- ① 球の半径を求めよ。
- ② この球の表面積を求めよ。
- ③ 球を入れたとき、あふれ出た水の体積を求めよ。